Álgebra Lineal

Matrices. Operaciones con matrices

23) El rango de una matriz A es, por definición, el número de filas no nulas de su forma de Hermite por filas. Si nos dan la condición de que el rango de una matriz A coincide con el número de columnas no nulas de su forma de Hermite por columnas, probar que si A es una matriz $m \times n$, $rg(A) \leq min\{m, n\}$

24) Indicar si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas razonando la respuesta:

Si S es un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y m ecuaciones y coeficientes en un cuerpo $\mathbf{K}$, si A es la matriz de coeficientes y B la matriz de términos independientes,

1.- A es una matriz $m \times n$
2.-$(A|B)$ es una matriz $m \times (n+1)$
3.- Si $rg(A)$ es m entonces el sistema es compatible
4.- Si $rg(A)$ es n entonces el sistema es compatible
5.- Si $rg(A) = m = n$ entonces el sistema es compatible determinado
6.- Si S tiene infinitas soluciones entonces es homogéneo.

25) Indicar razonadamente si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas: Sea A una matriz cuadrada de números reales:

(a) Si A es antisimétrica, entonces A^2 y A^4 son antisimétricas

(b) A es diagonal $\Leftrightarrow A^2$ es diagonal

(c) AA^t es simétrica

(d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) Si $AB = AC$ entonces $B = C$

(f) Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ ó $B = 0$

26) Indicar si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

El sistema

$$\begin{aligned} az =& b \\ y + z =& 0 \\ x + ay + z =& 0 \end{aligned}$$

1 Es compatible determinado si y sólo si $a \neq 0$

2 Si $b = 0$ es compatible determinado

3 Si $a = b = 0$ es compatible indeterminado

27) Resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

28) Obtener las matrices A y B que verifiquen el sistema:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

;

$$A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

29) Explicar por qué en general $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ y $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$

30) Una matriz se llama idempotente si $A^2 = A$. Probar que la matriz siguiente es idempotente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

31) Calcular A^2, A^3, A^4, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo mismo para

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

32) Probar que la suma de matrices simétricas es simétrica. Demostrar que el producto no lo es en general.

33) Dada una matriz cuadrada A, demostrar que $A+A^t$ es una matriz simétrica. Probar que toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. (El cuerpo $\mathbf{K}$ es $\mathbf{R}$ ó $\mathbf{C}$)

34) Para la matriz cuadrada de orden 3 de números complejos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2i \\ 2 & 1 & i \\ 2i & i & -1 \end{pmatrix}$$

pruébese por inducción que $A^k = 4^{k-1}A$

35) Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Averiguar si existe alguna matriz no nula, X, tal que $XA = BX^t$

36) Sea A la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ a & -1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

que depende del parámetro a. Se pide

1. Hallar A^2 y dividirla en bloques para calcular A^4.

2. Hallar a para que A sea *nilpotente*, es decir, existe un natural no nulo p, tal que $A^p = 0$

3. Hallar A^{4n} y A^{4n+2} para cualquier natural n

37) Hallar todas las matrices que conmutan con la matriz A (es decir $JA = AJ$) siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indicar cuáles de ellas son simétricas o antisimétricas.